

新北市土城區廣福國小第 12 屆資優班獨立研究

解鎖！SET 的 數學密碼



研究者：陳彥碩

指導老師：呂佩樺老師

摘要

為了瞭解桌遊「SET」背後的數學規律，我們從 81 張卡牌中選出固定顏色的 27 張卡牌進行分析。透過數學推理和電腦模擬，我們發現這 27 張牌中共有 117 組正確的 SET。在機率方面，當桌面上發到 9 張牌時，出現 SET 的機率已經高達 99.97%，但一定要發到 10 張牌才能保證絕對有解。比較後也發現，卡牌特徵越多，組合的複雜度會跳躍式增加，這與數學中的維度觀點有關。最後，我們還根據這些數學特性設計出新的玩法，這場實驗讓我們看到數學在遊戲分析和規則設計中非常有趣且實用的一面。

第壹章、緒論

一、研究動機

當我在資優班上課時，老師教我們一款叫做 SET 的桌遊。這款遊戲的每張卡牌都有四個特徵，有顏色、形狀、數量和填充，每個特徵都有三種屬性變化，所以總共有 81 張不同的牌。遊戲的規則是要從中找出三張牌，讓每一個特徵都「全部一樣」或「全部不一樣」，這樣才算是一組 SET。

剛開始我覺得只是好玩的桌遊，但在玩的過程中，我發現這遊戲好像藏了很多有趣的數學問題。像是：為什麼是 81 張牌？最少發幾張牌一定會有一組 SET？每場遊戲最後會剩下幾張牌？可不可以剛好把全部的牌分成 27 組 SET？我查了一些資料，發現很多人也對這款遊戲做過研究。

於是我決定做這個主題的獨立研究，想要用自己的方法找出這些問題的答案，看看 SET 遊戲中有哪些規律，並觀察會出現什麼樣的結果。希望透過這次研究，能幫助我更了解這款遊戲，也學到更多有趣的數學知識。

二、研究目的與問題

1. 27 張 SET 卡牌要發幾張才會 100%SET。
2. 求出 27 張 SET 卡牌的排列組合情況。
3. 27 張 SET 和 81 張 SET 數學上的差異。
4. 創造其他種玩法的可能。

第貳章、文獻探討

一、名詞定義

1. SET：指一款桌上遊戲的名稱。
2. 反證法：是一種數學證明方法，要先假設你要證明的東西是錯的，然後從這個「假設」出發去推理，如果推到最後出現「矛盾」或「不可能的事」，就表示這個假設是錯的，所以原本要證明的東西是對的。
3. 機率：機率是衡量隨機事件發生可能性的數學概念，其值介於 0（不可能發生）到 1（必然發生）之間，常以百分比表示。
4. 電腦模擬法：在本資料中，指的是利用電腦程式來建立數學分析的方法。
5. 子空間：子空間 (Subspace) 是指一個向量空間的子集，且本身在的加法和純量乘法運算下也是一個向量空間。核心定義在於封閉性：必須包含零向量，且內部任意向量的加法與純量乘法結果仍落在中。子空間通常是通過穿過原點的直線或平面來理解。

二、相關研究

我找到了用數學來分析 SET 的三篇相關研究，閱讀過後整理成表格如下：

編號	作者(年代)	題目	我的發現
1	小論文競賽 林儷蓁、詹秉霖 林欣妤、林千綸	GIVE ME A SET—SET 的 探究與推廣	SET 的卡牌分類有形狀、數量、顏色、填充的特徵和 1080 個 SET 的組合。
2	科展 張哲睿、簡暉倫 吳家韻、陳文悅 張婉婷	配對奇「跡/ 機」—SET 遊 戲的探討與變 型	四種特徵之中情境分類和用線條標出九張 SET 的路徑，同時告訴我四種特徵之中情境分類和用線條標出九張 SET 的路徑，同時找出讓剩餘卡牌為零的可能性。
3	科展 李俊璋、朱紘廷 林致愷、許嘉玲 陳珈妤、周其萱	嚴肅甜心	這一篇文章告訴我 SET 可以用程式模擬剩餘卡牌的數量機率和不同 SET 性質相同的點和不相同的點。

● 三篇研究結論中，共同發現的重點如下：

1. SET 牌組由四種條件（顏、形、數、填）各有三種變化組成，共有 81 張不同的牌（ $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 種情況）。
2. SET 的組合方式有 1080 種。

3. 至少發 21 張牌，一定會出現 SET。
4. 確定 SET 共有 15 種不同類型的配對。
5. 每一種配對類型皆可在遊戲中單獨使用，將 81 張牌全用完形成 27 組 SET。(GIVE ME A SET 沒有研究)

● 我將這三篇研究，以數學研究方法來比較差異如下表

研究主題	嚴肅甜心	配對奇「跡/機」— SET 遊戲的探討與變型	GIVE ME A SET— SET 的探究與推廣 (GIVE ME A SET)
邏輯與類型分析	透過 <u>反證法</u> 來破解發幾張牌一定會出現 SET。根據 <u>四個屬性進行分類與編碼</u> （將「圖形」轉換成「數字」）。	採用 <u>嘗試錯誤法</u> 、實作觀察與 <u>歸納</u> ， <u>窮盡</u> 列舉出 SET 的 15 種配對類型（1D 到 4D）。	透過 <u>文獻資料整理</u> 認識 SET 的歷史、規則和數學原理。分析 SET 牌的特性和 15 種不同類型。
模擬與機率	進行 <u>實際操作</u> 100 盤遊戲和 <u>電腦程式設計模擬</u> 100,000 組結果（探討遊戲剩下張數）。	透過從特殊化到一般化的推演歷程探討 <u>機率變化</u> 。 <u>提出 SET 機率計算公式</u> ： $(\text{候選牌數}-\text{候選牌被重複配對的})$	透過 <u>數學計算</u> 確認「最多不出現 SET 的排組是 20 張」。

		次數) / 翻牌數。	
數學 延伸 研究	找出 81 張牌用完形成 27 組 SET 的「關鍵密碼」，並將其延伸到大九宮格圖。	進行 實作 試驗驗證單一配對類型是否能用完 81 張牌。 <u>分析組牌軌跡和胚胎</u> （小九宮格與大九宮格）來研究換牌法。	僅進行 SET 教學推廣活動和教學。沒有數學延續的研究。

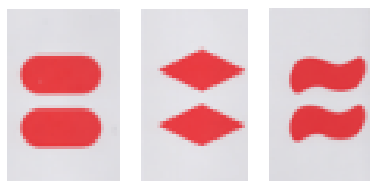
三、SET 桌遊簡介

- 是由 Marsha Falco 發明於 1974 年，於 1991 年推出市場。
- 每張牌由 4 個特徵組成，每個特徵有 3 種屬性，形成 81 張獨特的牌。
- 「SET」的定義：三張牌在每一個特徵上，要完全都一樣、或是完全都不一樣，才可以組合成一組。

四、SET 與數學的關聯

每張卡牌由[顏色、數量、填充、形狀] 四個特徵組成，每個特徵有三種屬性。

每一種 SET 的組合都是一種規律，例如：



三張卡牌特徵說明：

數量:是 完全相同(都是二)	顏色:是 完全相同(都是紅色)
形狀:不 完全不同(各種形狀)	填充:是 完全相同(都是實心)

四個特徵中，每一個特徵中屬性完全一樣或完全不一樣就可以組合成一組，而這樣的一組三張卡牌，它就是 SET 的基本規律組合。

五、SET 的排列與組合特性分析

在標準的 SET 遊戲中，每張牌有 4 個特徵，每個特徵有 3 種屬性。這些特徵和屬性整理成下表：

特徵	顏色	形狀	填充方式	數量
屬性	紅、綠、紫	橢圓、波浪、菱形	實心、空心、條紋	1、2、3 個

六、SET 的圖論應用與建模

有一些進行 SET 的研究者，會將 SET 牌的結構轉化為幾何空間中的點與線段

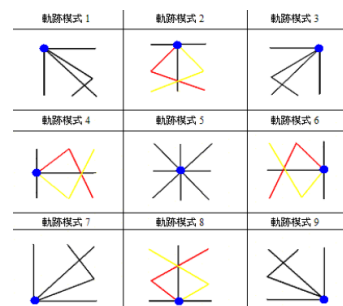
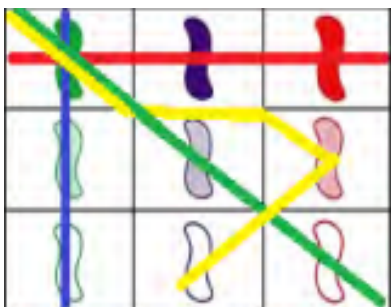
進行分析，這實質上是應用了圖論和組合幾何學的原理，如：

1. SET 排列組合：

根據研究【嚴肅甜心】，SET 牌組的結構被想像成散布在四度空間的 81 個點。這是由於 SET 牌由四個屬性（顏色、數量、填充、形狀）構成，每個屬性有三個元素，每個屬性代表一個空間維度。在這個幾何空間中，每三個點連成一線，即是一組 SET（三點共線的概念）。

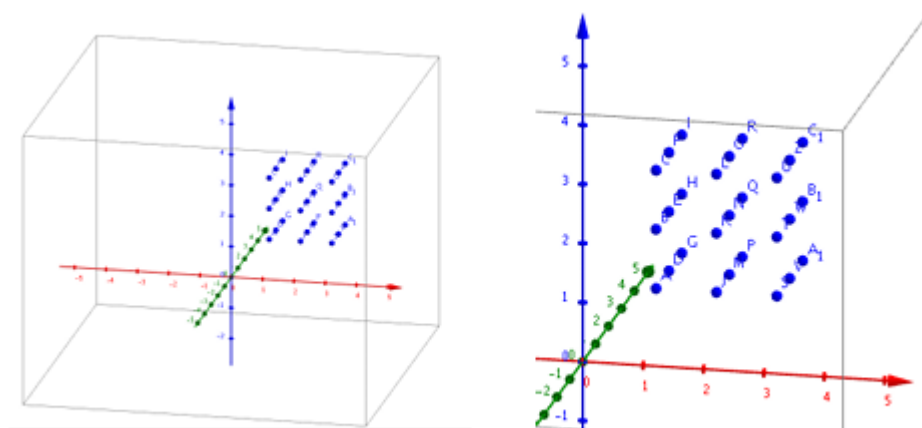
研究中，研究者透過將牌組屬性編碼（將「圖形」轉換成「數字」的形式）的方式來簡化問題，並破解出所有 SET 的情況。此外，研究也提到不同屬性數量對應的空間維度：如三種屬性（27 張牌）是三度空間（立體三個九宮格），四個屬性（81 張牌）是四度空間（立體九個九宮格）。

另外還有像是【配對奇「跡/機」—SET 遊戲的探討與變型】這一篇科展報告的內容，研究者分析相同數量的 SET 卡片 9 張(以圖片，並確認其中有哪些 SET 的組合。研究者將這個問題轉換為在圖中找一個起始點，並畫出軌跡，使它們構成一個 SET 的連線軌跡模式，以利後續分析和研究。他們運用此方法找出 81 張 SET 卡牌中 SET 剩餘零張牌的組合的軌跡模式。



2. 最大 SET 數量：

【嚴肅甜心】中研究者把 SET 牌變成點和線，透過幾何空間模型的分析，得出的結論是這 81 個 SET 點總共交織出 1080 條美麗的線段。這 1080 條線段，即是 SET 牌總共可以配對出 1080 組不同的 SET。



七、運用機率方式或數學反證法進行研究：

1. 運用機率的數學研究：

在【嚴肅甜心】中研究者想找出最大的卡片量，使其中不含任何一組 SET，他們運用機率的公式來計算，邏輯如下：翻牌數中會有一定數量的候選牌數，而候選牌數也會因母牌數增多而逐漸增加。但也有可能有兩對母牌組同時需要同一張牌，而出現共用的候選牌數。由於原本候選牌數當中包含了共用的候選牌數已包括候選牌被母牌組共用的次數重複，故將多被重複計算到的候選牌數減去。所以「翻牌中組成 SET 的機率」是翻牌數中出現候選牌數的機率，其算法：「(候選牌數-候選牌多被重複計算的總數)÷ 翻牌數」。他們運用這樣的邏輯，發現 100%會有 SET 的隨機張數，是 21 張。

2. 運用反證法的數學研究：

反證法就是需要先假裝你要證明的東西是錯的，然後從這個「假設」出

發去推理，如果推到最後出現「矛盾」或「不可能的事」，就表示這個假設是錯的，所以原本要證明的東西是對的。如[嚴肅甜心]的資料中，研究者利用反證法來找出最多可以找到 20 張牌還無法形成一組 SET 的情況，而發到第 21 張牌，無論我們怎麼試驗，都一定會出現一組 SET。

八、SET 遊戲的電腦模擬

SET 的研究也可以運用電腦模擬和演算來進行，例如【嚴肅甜心】中，他們使用了暴力破解法（窮舉法）的概念來進行電腦模擬。

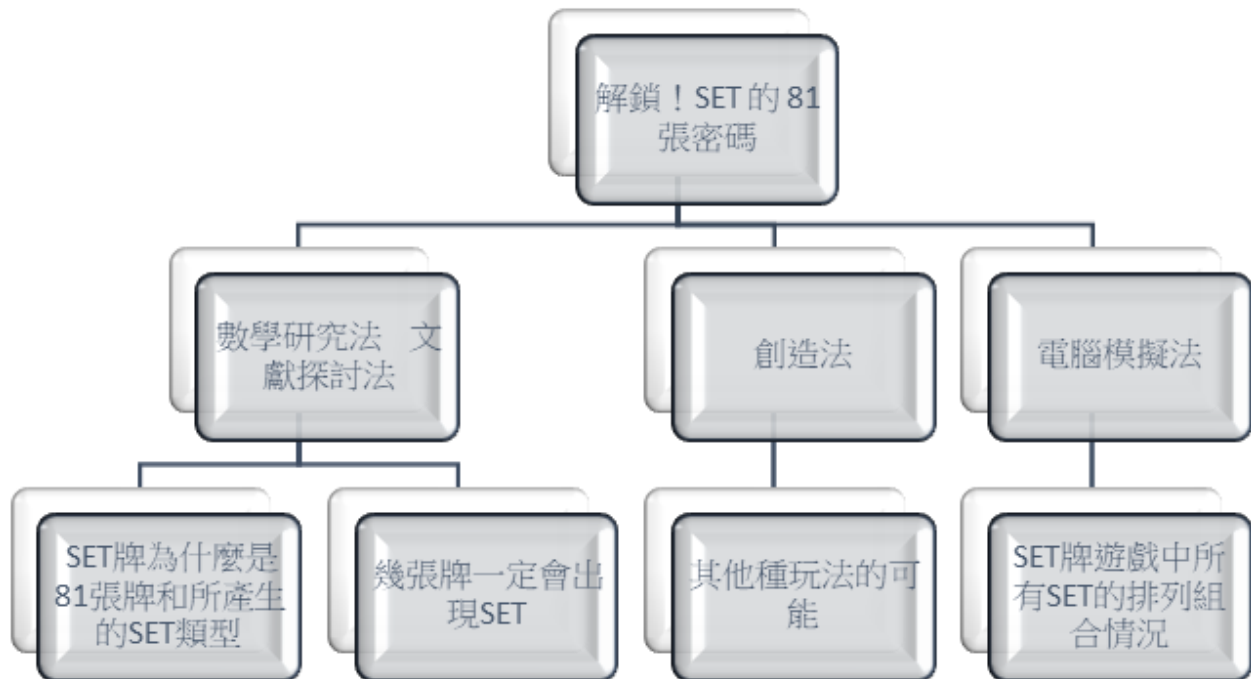
研究者想模擬每場遊戲會剩下幾張牌，他們認為實際操作 100 盤的樣本數量太少，因此利用程式設計將結果模擬出 100000 組結果。模擬後發現，剩下 9 張牌的機率最高(約 59%)，剩下 12 張牌和 6 張牌的機率也都很高(皆超過 20%)，排組全部用完的次數有 50 次(機率 0.05%)，並且完全沒有出現剩下三張牌或十八張牌(機率 0%)。研究者透過將實際操作 100 盤的數據與程式模擬的 100,000 盤數據進行比較，發現雖然兩者數據有所差距，但他們相信樣本數越高，結果將越接近準確值。



[圖為嚴肅甜心中運用電腦模擬後的結果]

第參章、研究方法與設計

一、研究架構圖



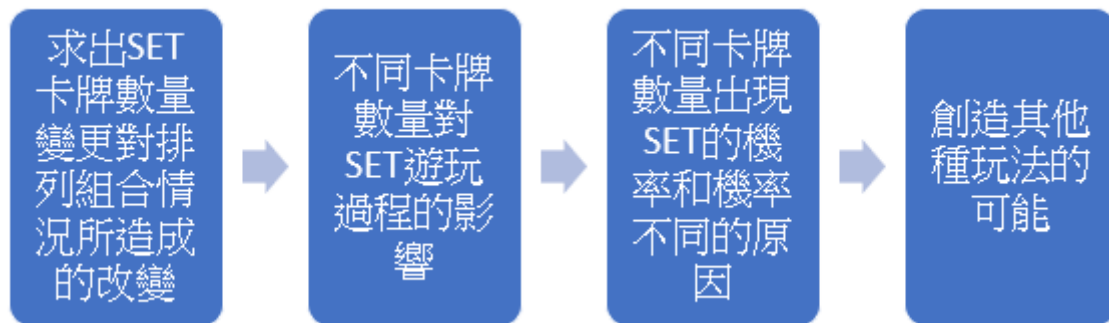
二、研究工具

以下是研究時，會用到的工具。

1. SET 	2. 腦袋 	3. 雙手 	4. 電腦 
---	--	---	--

三、研究設計與流程

(一)研究流程圖



(二)研究設計

我用了四種研究方，分別是：文獻探討法、數學研究法、電腦模擬法、創造法，這四種研究法分別幫助我：了解其他研究者的作業方式、求出 SET 各種方面的機率問題、演算出 SET 遊戲的軌跡模式和創造除其他的玩法。

研究一、27 張 SET 卡牌要發幾張才會 100%SET。

我的想法：了解發不同卡牌數對 SET 出現的機率有何改變和其原因。

研究設計說明：運用數學分析法來求出發不同卡牌數的 SET 機率。[運用反證法、機率]

研究二、求出 27 張 SET 卡牌的排列組合情況。

我的想法：了解 27 張 SET 排數改變後對排列組合情況。

研究設計說明：運用圖論建模和數學分析法。

研究三、27 張 SET 和 81 張 SET 數學上的差異。

我的想法：了解 27 張卡牌對遊戲的有甚麼樣的影響和改變。

研究設計說明：運用數學分析法和文獻探討法來深入探討這個問題。[運用列舉法。]

研究四、創造其他種玩法的可能

我的想法：改變規則做出其他種玩法。

研究設計說明：運用創造法。

第肆章、研究內容與過程

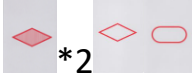
一、研究過程與發現：

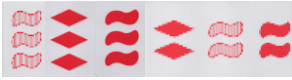
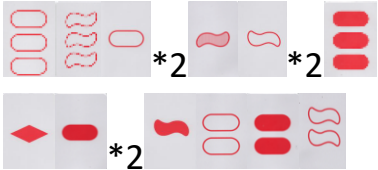
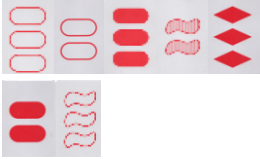
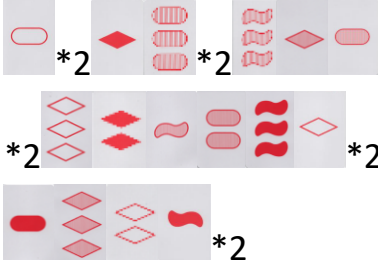
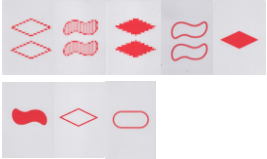
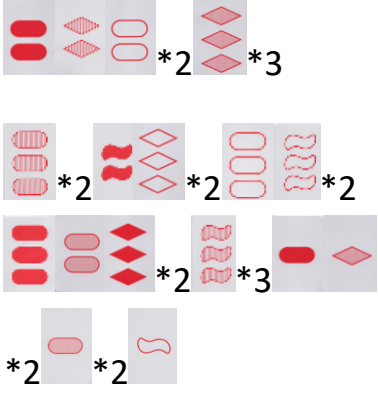
我選的 27 張牌是不包含顏色特徵[因此只選出紅色來進行研究]共有 $1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$ 張卡牌，我預計研究有下面四點：

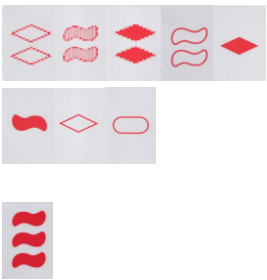
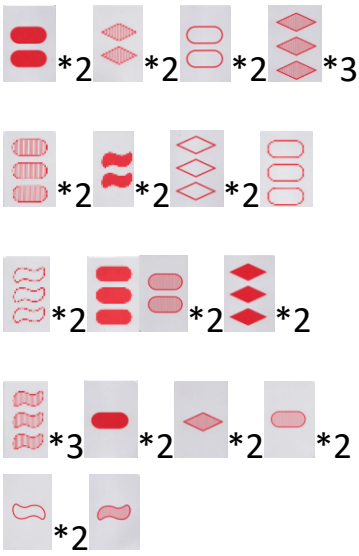
1. 27 張 SET 卡牌要發幾張才會 100%SET。
2. 求出 27 張 SET 卡牌所有的排列組合情況。
3. 27 張 SET 和 81 張 SET 數學上的差異。
4. 創造其他種玩法的可能。

研究一：27 張 SET 卡牌要發幾張才會 100%SET

要計算 27 張 SET 卡牌發幾張才會 100%SET，可以透過數學公式計算不同張數下出現 SET 的機率，我從過去研究中發現公式為：「(候選牌總數 - 候選牌重複計算的總數) ÷ 剩餘牌數」。因此我使用模擬的方式，模擬出不同牌卡張數時的情況，並從而整理出不同張牌卡 SET 的機率，表格如下：

桌面未形成 SET 牌張數牌堆中剩 下的張	牌堆中 剩下的 張數	任取兩張 牌可形成 組數	實際上牌堆中的牌可與 桌面上的牌形成 SET 的 張數	組成 SET 的 機率
2 	25	1(1)	1 	4% (1/25)
3 	24	3(2+1)	3 	12.5% (3/24)
4 	23	6(3+2+1)	6 	26.1% (6/23)
5 	22	10(4+3+2+1)	9  	40.9% (9/22)

6 	21	15(5+4+3+2+1)	12 	57.1% (12/21)
7 	20	21(6+5+4+3+2+1)	17 	80.9% (17/21)
8 	19	28(7+6+5+4+3+2+1)	17 	89.4% (17/19)

9 	18	36(8+7+6 +5+4+3+2 +1)	18 	100% (18/18)
--	----	--------------------------------------	--	----------------------------

由模擬的表格整理中我發現，在這樣的卡牌條件下，只要發 9 張牌，就可以達到 100%SET，但是後來的研究發現:隨著牌數增加，不同的卡牌組則方式增加，原本的算式會忽略「條件機率重疊」的問題（新抽出的牌可能與桌面上已經存在的牌形成重複的組合，統稱帽及問題）。因此 9 張牌還是有可能無法湊出 SET，為了確保精準度，我決定運用 Python 程式進行 10 萬次的「蒙地卡羅模擬 (Monte Carlo Simulation)」，我和 AI 討論後請他幫我寫電腦模擬發牌的程式，並讓電腦實際模擬發牌 10 萬次，程式計算得出的機率數據如下：

發 3 張牌：4.06%

發 4 張牌：16.13%

發 5 張牌：37.74%

發 6 張牌：63.53%

發 7 張牌：85.72%

發 8 張牌：97.24%

發 9 張牌：99.97%

發 10 張牌：100.00%

從電腦模擬中我發現：9 張牌的機率是 99.97%，而不是 100%！這代表有 0.03% 的極低機率，會抽到「完全沒有 SET」的極端組合。

後來查了資料，發現在數學界，這被稱為 Cap Set（最大無 SET 集合）問題。也就是說，在 27 張牌的遊戲中，如果你運氣非常極端，最多可以挑出 9 張牌擺在桌上卻湊不出任何一組 SET，而九張牌中剩餘的 0.03% 的 SET 排列組合如下：

透過程式模擬與 Cap Set 理論，我推翻了自己原先的假設。在 27 張牌的遊戲中，9 張是找不到 SET 的極限，必須發出 10 張牌，才能保證 100% 找到 SET！而原本的 81 張卡牌遊戲，極限則是 20 張，需要發到 21 張卡牌才能保證 100% 存在 SET。

小結：

透過 SET 卡牌的規則可以發現，若卡牌總數為 27 張，發 3 張卡就 SET 的機率是 4%。並且 27 張卡牌遊戲時，只要發 9 張牌，就可以達到 100%SET 的機率，而原本的 81 張卡牌遊戲，則需要 21 張卡牌才能達到 100%SET 的機率。

下圖為程式模擬所算出的機率：

```
import random
from itertools import combinations

# 1. 建立 27 張牌的牌庫 (3 個屬性, 每個屬性值為 0, 1, 2)
deck = [(a, b, c) for a in range(3) for b in range(3) for c in range(3)]

# 2. 判斷三張牌是否為 SET 的函數
def is_set(card1, card2, card3):
    for i in range(3): # 檢查 3 個屬性
        if (card1[i] + card2[i] + card3[i]) % 3 != 0:
            return False # 只要有一個屬性加起來不是3的倍數, 就不是SET
    return True

# 3. 模擬函數: 給定發牌張數 N, 模擬 100,000 次
def simulate(N, num_trials=100000):
    success = 0
    for _ in range(num_trials):
        # 從牌庫中隨機抽出 N 張牌
        hand = random.sample(deck, N)

        # 檢查這 N 張牌中, 任挑 3 張是否有 SET
        has_set = False
        for combo in combinations(hand, 3):
            if is_set(combo[0], combo[1], combo[2]):
                has_set = True
                break # 找到一組 SET 就可以跳出檢查了

        if has_set:
            success += 1

    return success / num_trials

# 4. 執行模擬並印出結果 (測試發 3 到 10 張牌)
print("開始進行 10 萬次模擬...\n")
for cards_drawn in range(3, 11):
    probability = simulate(cards_drawn)
    print(f"發 {cards_drawn} 張牌, 出現 SET 的機率約為: {probability:.2%}")
```

開始進行 10 萬次模擬...

發 3 張牌, 出現 SET 的機率約為: 4.06%
發 4 張牌, 出現 SET 的機率約為: 16.13%
發 5 張牌, 出現 SET 的機率約為: 37.74%
發 6 張牌, 出現 SET 的機率約為: 63.53%
發 7 張牌, 出現 SET 的機率約為: 85.72%
發 8 張牌, 出現 SET 的機率約為: 97.24%
發 9 張牌, 出現 SET 的機率約為: 99.97%
發 10 張牌, 出現 SET 的機率約為: 100.00%

研究二：求出 27 張 SET 卡牌的排列組合情況。

在原本 SET 的 81 張牌裡，若我們隨便抓一張牌出來，剩下的牌還有 80 張。這 80 張牌可以兩兩一組，跟原本隨便抓出的這張牌湊成 SET。 $80 \div 2 = 40$ 。也就是說，每一張牌都剛好在 40 組不同的 SET 裡面。

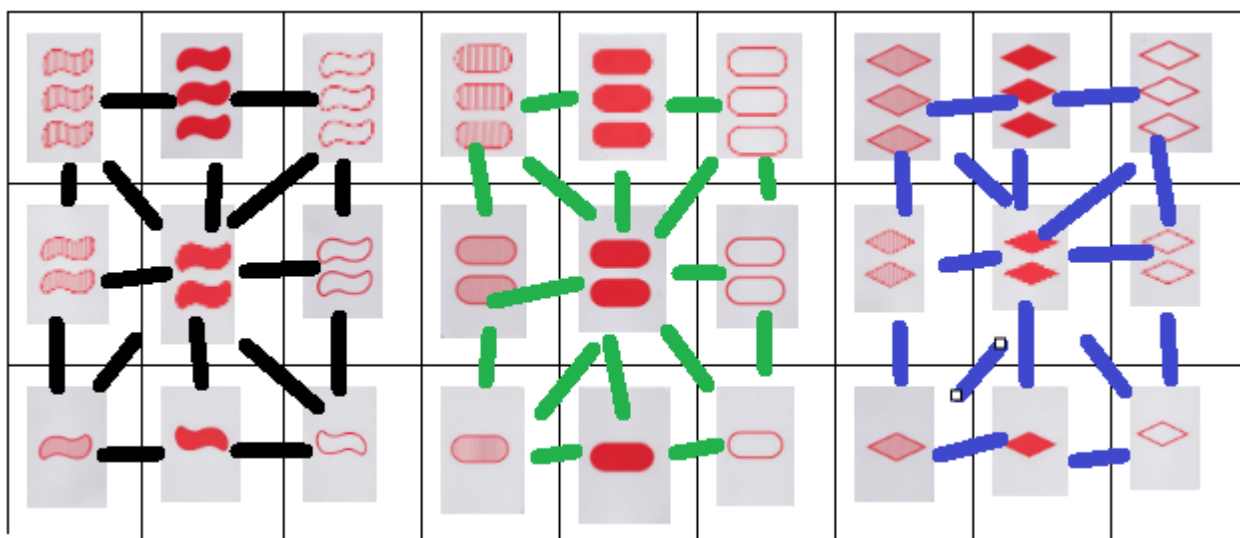
全部有 81 張牌，每張牌都出現在 40 組 SET 裡，所以總共出現了 $81 \times 40 = 3,240$ 次。但是，每一組 SET 是由「三張牌」組成的，所以在上面的 3,240 次裡，每一組 SET 都被重複算了三次，因此最後把 $3240 \div 3 = 1080$ 。總共有 1080 組。

若要計算任取三張牌恰好組成一個 SET 的機率，總組合數：從 81 張牌中任取 3 張的組合數為 $C = (81 \times 80 \times 79) \div (3 \times 2 \times 1) = 85320$ 組。根據上一段的推算，81 張牌總共可以組成 1080 組不同的 SET，因此，隨機發出 3 張牌能組成 SET 的機率約為 $1080 \div 85320$ 大約為 1.27%。

如上文字顯示，我運用了相同的方法來求出 27 張牌的所有 SET 組合為【 $27-1=26$ $26 \div 2=13$ $27 \times 13 \div 3=117$ 】，27 張牌的所有 SET 組合數為 117。

若要計算任取三張牌恰好組成一個 SET 的機率，單純從 27 張中選 3 張： $c_{27}^3 = (27 \times 26 \times 25) \div (3 \times 2 \times 1) = 2925$ ，總共有 2925 種三張組合。因此，隨機發出 3 張牌能組成 SET 的機率約為 $117 \div 2925$ 為 4%，這也與研究一中電腦模擬發 3 張牌的機率（4.06%）吻合。

27 張卡牌列舉出來如下：我嘗試將兩兩卡牌間畫出線段，但兩兩卡牌的組數遠比目前還多許多。（不在鄰近位置的卡牌也可以湊組）



若以圖像的方式分析：

- 每張卡都可以與剩下的 26 張卡牌中的任一張湊成組別。
- 但每個方向與其倍數代表同一方向，因此方向數為 $26 \div 2 = 13$ 。

每個方向可從 27 個點出發形成直線，但每條線包含 3 個點，因此會被重複計算 3 次： $27 \times 13 \div 3 = 117$

所以在 27 張卡牌中共有 117 組合法 SET。換句話說，在 2925 種三張組合中，只有 117 組符合 SET 規則。也和之前計算出來 117 組數的答案吻合。

小結：

從 27 張 SET 卡牌中任選 3 張，總共有 2925 種三張組合。但依照 SET 的規則，每個屬性必須 三張全相同或全不同，這在數學上可視為三維有限空間中的 三點共線。因此，一組合法 SET 等價於空間中的一條直線。如果用此概念來計算，則能夠 SET 組別則為 117 組。

研究三：27 張 SET 和 81 張 SET 數學上的差異。

我在研究中發現，27 張 SET 和 81 張 SET 的差異，不只是卡牌數量的差異，更是「維度差異」。以下整理和分析兩種的主要差異：

一、屬性數量的差異

81 張 SET (完整 SET)	27 張 SET (紅色 SET)
4 個屬性	3 個屬性
每個屬性 3 種	每個屬性 3 種

二、維度與組合數的差異

項目	27 張 SET	81 張 SET
空間維度	3 維[3*3*3]	4 維[3*3*3*3]
SET 數	117	1080
每張牌參與的 SET 數	13	40

這些數字來自有限幾何，而不是靠暴力枚舉。

三、結構性的差異

27 張：SET 出現 密度高，幾乎一定找得到

81 張：SET 出現密度相對低，盤面上偶爾會找不到 SET

這樣可能會造成遊玩過稱的不同

四、對稱性不同

27 張是 81 張的「子空間」

保留線性結構，但少了一個屬性[顏色一致]

三、視覺與策略差異

在 27 張中每一張牌「關係更緊密」使 SET 更集中[SET 出線機率更高]。

在 81 張中組合更多元化，搜尋 SET 的卡排變得更困難。

四、一個很關鍵的理解

81 張 SET → 四個獨立屬性都在運作

27 張 SET → 有一個屬性被鎖死

結果不是「少 1/3 的複雜度」，而是從 4 維世界變成 3 維世界。

SET 的數量與維度呈現的是結構性成長，而非單純倍數增加。從 27 張（117 組）到 81 張（1080 組），雖然卡牌數增加 3 倍，但 SET 數量增加約 9 倍，顯示維度提升會大幅增加組合複雜度。

小結：

81 張 SET 牌和 27 張最大的不同處在於他們兩個的空間結構不相同[一個是三維，一個是四維]，而造成此原因的是兩者之間的卡牌組合方式有所不同[27 張是 $3 \times 3 \times 3$ ，而 81 張則是 $3 \times 3 \times 3 \times 3$]這也導致了尋找 SET 的難度改變。

研究四：創造其他種法的可能。

SET 的本質不是卡牌圖案，而是數學結構，只要改動結構，就能自然長出新玩法。

一、從「空間維度」改變遊玩節奏

27 張版（3 維）：屬於節奏密集型玩法。全部攤開誰先找到 SET 就得分。可追加規則：一次必須找兩組「共享一張牌」的 SET。

81 張版（4 維）：屬於策略搜尋型（經典版）。可改為限制時間找出盤面上的「唯一 SET」。

243 張版（5 維）：屬於合作解謎型。玩家需共同找滿指定數量的 SET 才能過關，強調對結構的理解而非眼力。（第五維度可以是現有屬性乘二，或增加全新屬性）。

二、從「判定條件」重新定義 SET

反 SET：遊玩中必須找到符合部分 SET 條件（例如兩個屬性對了），但整體卻「不是合法 SET」的卡牌組合。

加權 SET：指定一個屬性為「關鍵屬性」（例如形狀必須全不同，其餘隨意），這會讓遊戲過程變得更加困難。

多層 SET：先找出基礎 SET，再把這組「SET 當成一張牌」去尋找更高階的 SET。遊戲將從單純的反應力測驗變成深度策略思考。

三、從「互動機制」改變玩家關係

阻斷型（區域控制）：找到 SET 時不拿走，而是「鎖死其中一張牌」留在桌上，干擾對手連線。

偷竊機制：可以搶奪別人已宣告但尚未指認完成的 SET，當成自己的分

數。

陣營混合：全場共用同一個盤面，但每位玩家有自己的私人專屬任務 SET。

四、從「視覺與進階結構」切入

隱藏屬性（視覺限制）：SET 卡牌只顯示其中 3 個屬性，將第 4 個屬性隱藏，增加推理難度。

子空間切換（進階幾何）：這是最像創作者的一條路。指定有效的 SET 必須全部落在某個特定的 27 張子空間中，而玩家可以切換子空間，將有限幾何直接變成遊戲機制。

小結：

SET 牌卡的重點不是卡牌，而是結構，因此只要改變結構便能改變遊戲架構，進而發展出更多樣的法，例如：1 阻斷型 SET[在找到 SET 時度拿走而是放在牌桌並將其鎖死]。

第五章、結論與建議

一、結論

1、27 張卡牌的 SET 總數與發牌極限 在 27 張 SET 卡牌中，每張牌可以與其他牌形成 13 組 SET。計算所有卡牌的搭配，並扣除每一組都會被重複算到 3 次的情形後，可以得出 27 張卡牌共有 117 組不同的 SET。此外，我原本推算發 9 張牌就一定能找到 SET，但經過十萬次的電腦程式模擬驗證，我發現 9 張牌仍有極低機率找不到 SET。實際上，必須發到 10 張牌，才能 100% 保證桌面上一定有 SET。

2、符合 SET 規則的比例其實並不高 如果不考慮遊戲規則，單純從 27 張卡牌中任選三張，利用數學組合的算法總共有 2925 種搭配。將符合規則的 117 組 SET 與全部 2925 種組合相比，可以發現真正的 SET 只佔了約 4%。這表示在隨機抽出的三張牌中，要剛好符合 SET 規則的比例其實並不高，也代表這是一款很考驗觀察力的遊戲。

3、卡牌數量與屬性增加，複雜度會大幅提升 與完整的 81 張 SET 卡牌相比，27 張卡牌少了一個屬性，結構比較簡單。27 張卡牌共有 117 組 SET，而 81 張卡牌卻有多達 1080 組 SET。這顯示當卡牌的數量與「屬性（維度）」增加時，SET 的組合數量並不是只有增加三倍，而是會大幅跳躍式地成長，讓遊戲變得複雜許多。

4、SET 是一個可以持續創新的遊戲結構 如果要設計出一款全新玩法的 SET 桌遊，我發現遊戲的核心其實不是卡牌上的圖案，而是「全部相同或全都不一樣」的配對結構。只要我們改變卡牌的屬性數量、修改得分規則，或是改變玩家的互動方式，就能自然而然設計出全新的玩法。例如：把找到的牌鎖在桌上不能拿走、加入特定的策略條件，或是改成大家一起闖關的合作解謎模式。因此，SET 不只是一款卡牌遊戲，更是一個可以讓我們發揮創意、持續擴展的遊戲系統。

【總結】 在 27 張 SET 卡牌的遊戲中，總共可以形成 117 組不同的 SET。雖然從 2925 種隨機組合中，抽中 SET 的機率只有約 4%，但透過電腦模擬，我修正了原本的想法，證明只要發出 10 張牌，就 100% 能保證桌面上一定有 SET。

進一步與完整的 81 張卡牌比較，我發現當卡牌的屬性變多時，整體的組合複雜度會大幅提升（從 117 組暴增到 1080 組）。這也讓我了解，SET 背後有一個

非常嚴謹的數學邏輯。只要我們掌握這個配對的邏輯結構，就能打破原本的框架，發明出各種全新的桌遊玩法。總結來說，這份研究不僅讓我學會了排列組合與機率，更讓我體會到將數學運用在遊戲設計中的樂趣。

二、建議

1、將研究重心放在「設計全新玩法」 未來若有同學或學弟妹想進行相同主題的研究，建議可以把主要目的放在「創作全新的桌遊玩法」上。因為將卡牌背後的數學結構抓出來，並重新設計成新遊戲，是一個非常有創意的發展方向，也是歷屆學長姐比較少嘗試過的新穎領域。

2、導入「實際試玩」與「問卷調查」機制 設計出新玩法後，只靠思考和想像是不夠的。建議可以邀請同學或家人實際「試玩」，並製作問卷表單請玩家填寫。透過收集大家的真實回饋（例如：遊戲會不會太難、規則清不清楚、好不好玩等），可以更有系統地修正遊戲規則，讓新發明的桌遊更完善。

3、善用「電腦程式模擬」來驗證數學機率 這次的研究經驗讓我學到，在計算複雜的撲克牌機率時，單純用紙筆和公式推算很容易忽略重疊或極端的情況。強烈建議未來的研究可以結合資訊工具，例如使用寫程式的方式進行「電腦模擬」。讓電腦實際跑幾萬次發牌過程來得出數據，不僅結果會更精準，也能讓整份研究報告更具有科學公信力。

第陸章、參考資料

一、研究資料

SET 牌、桌遊、排列組合

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品說明書第三名

GIVE ME A SET— SET 的探究與推廣

二、網路資料

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/080408.pdf>

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/080415.pdf>

<https://student.hlc.edu.tw/action/report1/797/20240927102328812.pdf>

<https://punchboardgame.pixnet.net/blog/posts/9576627596>

<https://www.youtube.com/watch?v=bFNCICrSWNo>

<https://gameurlife.pixnet.net/blog/posts/10343917973>